



Kajuhova ulica 2
3000 Celje

Ocenjevanje oddaljenosti Lune

Astronomija
Raziskovalna naloga

Mentor:
Roman Ocvirk, inž. str.

Avtor:
Krištof Skok, 2. a

Srečanje mladih raziskovalcev Slovenije

Celje, marec 2013

Kazalo vsebine

Kazalo vsebine	2
Kazalo slik.....	3
Kazalo preglednic.....	3
Kazalo enačb	3
Povzetek	5
Zahvala	5
1 Uvod	6
1.1 Cilji	6
1.2 Metode dela	6
2 Teoretični del.....	6
2.1 Predznanje	6
2.1.1 Sferni trikotniki	6
2.1.2 Nebesni koordinatni sistemi.....	7
2.1.3 Časovni kot in zvezdni čas.....	8
2.2 Paralaksa	9
2.2.1 Dnevna paralaksa	10
2.3 Dosedanje raziskave	10
2.4 Predstavitev metode dela	11
2.4.1 Dnevna paralaksa	11
2.4.2 Nebesni sferni trikotnik.....	13
2.4.3 Hitrost in izračun paralakse	15
2.4.4 Oddaljenost	15
2.4.5 Časovni kot	16
3 Praktični del.....	16
3.1 Priprave na terensko zbiranje podatkov.....	17
3.1.1 Fotografiranje.....	17
3.2 Pridobivanje podatkov iz fotografije	18
3.2.1 GeoGebra	18
3.2.2 Cartes du Ciel.....	19
3.2.3 Postavitev fotografije	19
3.2.4 Določevanje položaja središča	20
3.2.5 Merilo.....	21
3.2.6 Matematična podlaga	21
3.2.7 Napaka ekvatorialnih koordinat	23
3.3 Simulacije	24
4 Razprava.....	26
4.1 Poenostavitve in netočnosti	26
4.1.1 Fotografiranje.....	27
4.1.2 Hitrost	27
4.1.3 Merilo.....	27
4.1.4 Napake meritev	27
4.2 Natančnost in točnost.....	28

4.3 Nadaljnje delo.....	28
Literatura	30
Viri slik.....	31

Kazalo slik

Slika 1: Sferni trikotnik	6
Slika 2: Nebesna koordinatna sistema.....	7
Slika 3: Ekvatorialni koordinatni sistem	8
Slika 4: Horizontalni koordinatni sistem.....	8
Slika 5: Časovni kot	8
Slika 6: Paralaksa	10
Slika 7: Skica spreminjanja Lunine paralakse.....	11
Slika 8: Upodobitev paralakse na nebesni sferi	12
Slika 9: Nebesni trikotnik.....	14
Slika 10: 67-odstotna osvetljenost površja.....	17
Slika 11: GeoGebra	18
Slika 12: Prikaz pomožnih objektov	18
Slika 13: Cartes du Ciel.....	19
Slika 14: Določevanje središča.....	21
Slika 15: Projiciranje na fotografijo	22
Slika 16: Nebesni koordinatni sistem na ravnini.....	22
Slika 17: Preslikava z ravnine na kroglo	23
Slika 18: Neohranjenje razdalj	27

Kazalo preglednic

Tabela 1: Koti in nasprotni loki v nebesnem sfernem trikotniku na zahodni polobli	13
Tabela 2: Spreminjanje hitrosti	17
Tabela 3: Kot B v odvisnosti od x in y Luninega središča.....	23
Tabela 4: Rezultati ponazoritvenega primera.....	24
Tabela 5: Rezultati 1. simulacije	25
Tabela 6: Rezultati 2. simulacije	25
Tabela 7: Rezultati 3. simulacije	25
Tabela 8: Rezultati 4. simulacije	26
Tabela 9: Rezultati 5. simulacije	26
Tabela 10: Razlike pri uporabi min. ali max. Dec.....	26

Kazalo enačb

Enačba 1: Sinusni izrek	6
Enačba 2: Časovni kot.....	8
Enačba 3: Lokalni sidarski čas	9
Enačba 4: Izražanje geografske dolžine v urah	9

Enačba 5: Rektascenzijska paralaksa	13
Enačba 6: Deklinacijska paralaksa	13
Enačba 7: Izračun paralakse	13
Enačba 8: Izračun kota x	15
Enačba 9: Rektascenzijska hitrost	15
Enačba 10: Izračun rektascenzijske paralakse	15
Enačba 11: Oddaljenost iz H	16
Enačba 12: Oddaljenost iz h , A in δ	16
Enačba 13: Višinska enačba	16
Enačba 14: Azimutna enačba	16
Enačba 15: Časovni kot meritve	16
Enačba 16: Enačba krožnice	20
Enačba 17: Napaka x koordinate	20
Enačba 18: Napaka y koordinate	20
Enačba 19: Merilo	21
Enačba 20: D	22
Enačba 21: B	22
Enačba 22: Izračun rektascenzije	23
Enačba 23: Izračun deklinacije	23

Povzetek

V raziskovalni nalogi sem izpeljal metodo določitve Lunine oddaljenosti preko določitve hitrosti spreminjanja geocentrične rektascenzije Lune in določitve dnevne paralakse iz razlike med geocentričnimi in topocentričnimi koordinatami. S to metodo lahko v dveh nočeh opazovalec z enega mesta z določevanjem Luninih koordinat s fotografiranjem izračuna njeno oddaljenost.

Zahvala

Najprej se moram zahvaliti svojemu mentorju Romanu Ocvirku za vso pomoč, motivacijo in pripravljenost.

Zahvalo pošiljam tudi preko meja, dr. Udu Backhausu na Fakulteto za fiziko Univerze v Duisburg-Essnu v Nemčiji. Uporabil sem njegove ideje, ki so osnovne stopnje moje metode.

Za strokovno pomoč se zahvaljujem Janezu Kosu in Maticu Smrekarju iz Astronomskega društva Labod ter Nikolaju Štritofu, ki mi je preko astronomskega foruma posredoval mnogo uporabnih informacij.

Z željo po nadaljnjem sodelovanju se zahvaljujem Urošu Čotarju in drugim iz Astronomskega društva Saturn za preteklo in prihodnjo pripravljenost ter pomoč pri praktični izvedbi naloge.

Za jezikovni pregled se zahvaljujem profesorici Klari Pavšer Stropnik in za pregled računalniškega oblikovanja profesorju Mateju Zdovcu.

1 Uvod

Z Luno kot največjim in najbližjim astronomskim telesom se pogosto ukvarjajo amaterski astronomi. Pomembna lastnost, ki je na dosegu amaterjev, je njena oddaljenost. Izvajali so že projekte, ki so vpletali več ljudi po svetu. Med pregledovanjem sem opazil ideje, ki so me napeljale na razvoj metode, s katero je mogoče doseči cilj z enega mesta.

1.1 Cilji

Cilj, ki ga želim doseči v tej nalogi, je razviti in preizkusiti metodo, s katero je možno določiti oddaljenost Lune iz ene točke na Zemlji.

1.2 Metode dela

Najprej je seveda na vrsti pregled literature. Z njeno pomočjo sem preučil dovolj sferne trigonometrije in nebesne mehanike, da sem lahko samostojno razvil del naloge.

Praktično delo bi lahko opredelili kot računsko in terensko. Podatke, potrebne za izračune, bi moral pridobiti na terenu s fotografiranjem Lune in jih uporabiti pri računskem postopku. Namesto teh sem uporabil slike iz planetarija.

2 Teoretični del

2.1 Predznanje

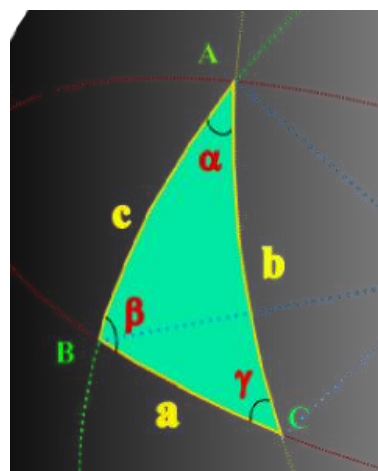
Da bomo kasneje razumeli teoretično podlago dela, moramo poznati nekaj orientacije po nebu in sferne geometrije.

2.1.1 Sferni trikotniki [7]

Sferni trikotniki so trikotniki na površju krogle oz. sfere (slika 1). Stranice teh so loki a , b , c med oglišči A , B , C . Lok nad kotom z vrhom v središču sfere ima velikost tega kota v kotnih enotah (npr. če $\angle ASB = 26^\circ$, potem $AB = 26^\circ$). Kot med lokoma (α , β , γ) je definiran kot kót med ravninama, na katerih ležita loka. Za sferne trikotnike velja sinusni izrek:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

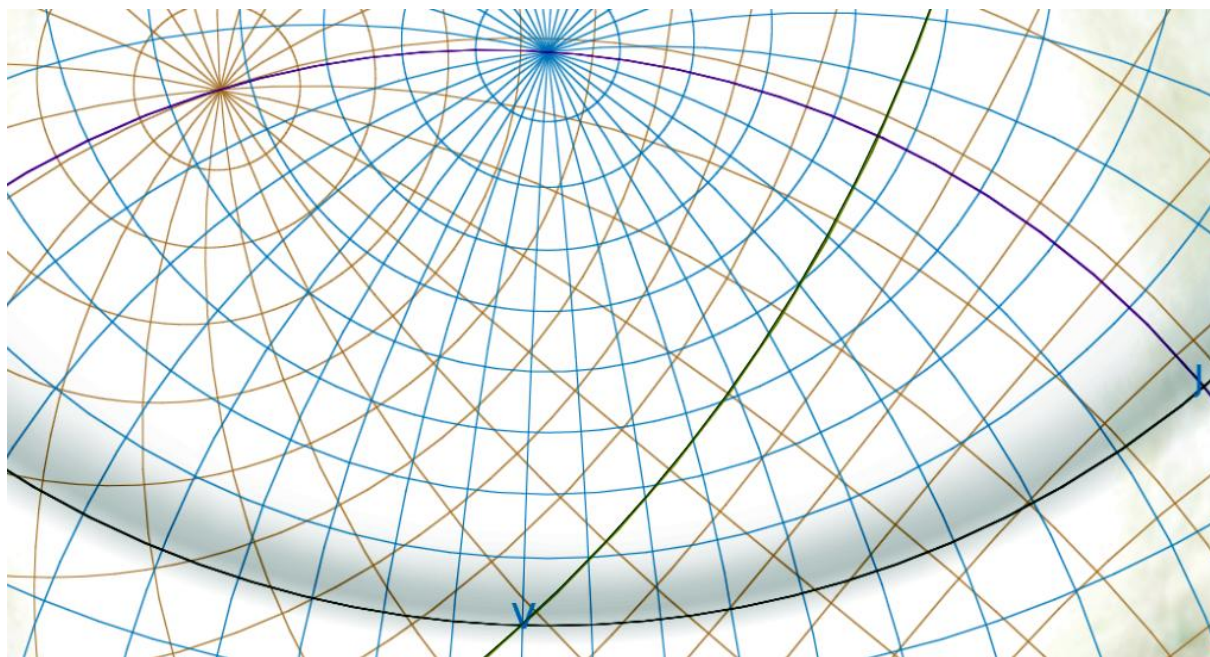
Enačba 1: Sinusni izrek



Slika 1: Sferni trikotnik

2.1.2 Nebesni koordinatni sistemi [8]

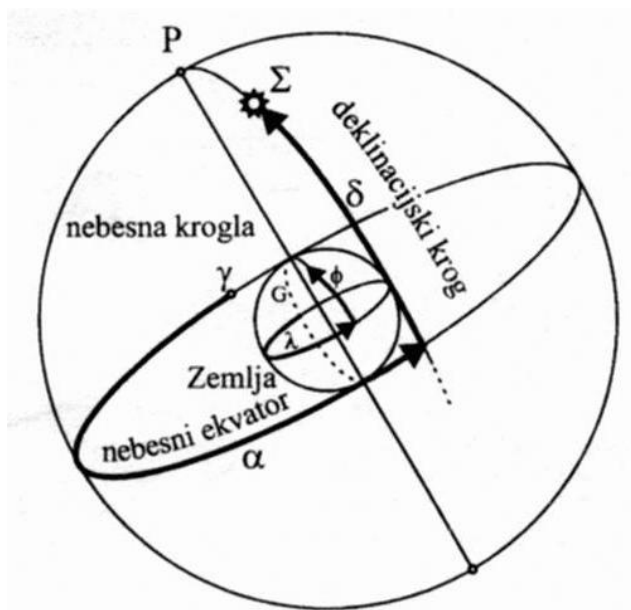
V astronomiji se uporablja več nebesnih koordinatnih sistemov, dva najbolj uporabljena sta ekvatorialni (oranžno) in horizontalni oz. alt-azimutni (modro) (slika 2). Lahko govorimo o geocentričnih ali topocentričnih sistemih oz. koordinatah. Pri prvem je središče sistema središče Zemlje in je uporabljen na splošno. Pri drugem je središče opazovalec; med sabo se razlikujejo glede na položaj opazovalca na Zemlji.



Slika 2: Nebesna koordinatna sistema

Ekvatorialni je podoben geografskemu; ima ekvator (zeleno) in nebesna pola, okoli katerih se nebo navidezno vrti. Tako kot ima Zemlja vzporednike, ima nebo rektascenzijske kroge, na katerih so telesa z isto deklinacijo (δ ali Dec). Ta koordinata je izražena v kotnih stopinjah in narašča od ekvatorja proti poloma od 0° do 90° na severni polobli in do -90° na južni polobli. Druga koordinata je rektascenzija (α ali Ra), ki je podobno določena kot geografska dolžina. Izražena je v urah, npr. $14^h 48^m 20^s$ ($0-24^h$ je isto kot $0-360^\circ$). Objekti z enako rektascenzijo so na istih deklinacijskih krogih, ki so podobni kot poldnevnik na Zemlji. Tudi tukaj je začetni krog določen po dogovoru, in sicer je to ta, na katerem je Sonce ob spomladanskem enakonočju. Ra narašča proti vzhodu od 0^h do 24^h (slika 3). Prednost tega sistema je, da imajo oddaljeni objekti izven sončnega sistema stalni koordinati, ker se sistem vrti skupaj z nebom.

Horizontalni ima za osnovno ravnino obzorje (črno), pola sta nadglavišče in zenit, ki je točka nad nami, in podnožišče ali nadir, ki je točka pod nami. Lega telesa je podana v višini (h ali Alt), ki je kot med telesom in njegovo pravokotno projekcijo na obzorje. Izražena je v stopinjah, tako da je obzorje 0° in zenit 90° . Druga koordinata je azimut (A ali Az), ki je kot med smerjo proti severu in smerjo proti pravokotni projekciji telesa na obzorje. Meri se od severa preko vzhoda od 0° do 360° (slika 4). V tem sistemu imamo prav tako črte, ki povezujejo točke z enako višino (podobno kot vzporedniki) ter črte, ki povezujejo točke z enakimi azimuti (podobno kot poldnevnik), ki se imenujejo meridijani. Pomemben je meridian, ki gre od juga preko zenita in severnega nebesnega pola do severa na obzorju. To je glavni meridian (vijolično). Ko se telo nahaja na njem, ima azimut 0° ali 180° in takrat kulminira oz. je v kulminaciji. To pomeni, da je dosegel najvišjo (ali najnižjo) višino. Ker je ta sistem vezan na kraj opazovanja, se koordinati teles stalno spreminjata skozi čas.



Slika 3: Ekvatorialni koordinatni sistem



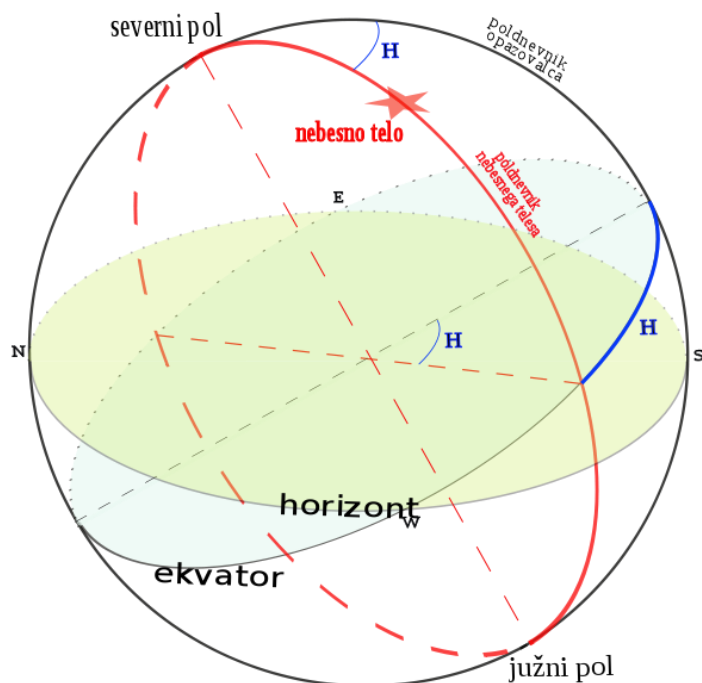
Slika 4: Horizontalni koordinatni sistem

2.1.3 Časovni kot in zvezdni čas [8]

S časovnim kotom (H) izražamo oddaljenost telesa od glavnega meridijana. Je kot med glavnim meridijanom in deklinacijskim krogom, na katerem je telo (slika 5). Izražen je lahko v urah (kot RA) ali stopinjah. Izračunamo ga:

$$H = S - \alpha$$

Enačba 2: Časovni kot



Slika 5: Časovni kot

S je lokalni zvezdni ali siderski čas. Ta čas je naravnian glede na zvezde in ne glede na Sonce, kot to uporabljamo v vsakdanu. Čas med dvema zaporednima kulminacijama nebesnega telesa je zvezdni ali siderski dan, ki je dolg $23^h 56^m 4^s$. Izračunamo ga lahko za določen kraj za določen trenutek po enačbi:

$$S = S(0^h UT) + \lambda + (t - t_0) \frac{366,2422}{365,2422}$$

Enačba 3: Lokalni siderski čas

Prvi člen je zvezdni čas na Greenwichu lokalno ob polnoči. Ta podatek je podan v efemeridah¹ za vsak dan. Tej vrednosti prištejemo geografsko dolžino kraja. Toda moramo jo pretvoriti v ure, kar praktično pomeni, da delimo vrednost v stopinjah s 15 ($24^h : 360^\circ = 1^h : 15^\circ$).

$$\lambda[h] = \frac{\lambda[^\circ]}{360^\circ/24^h}$$

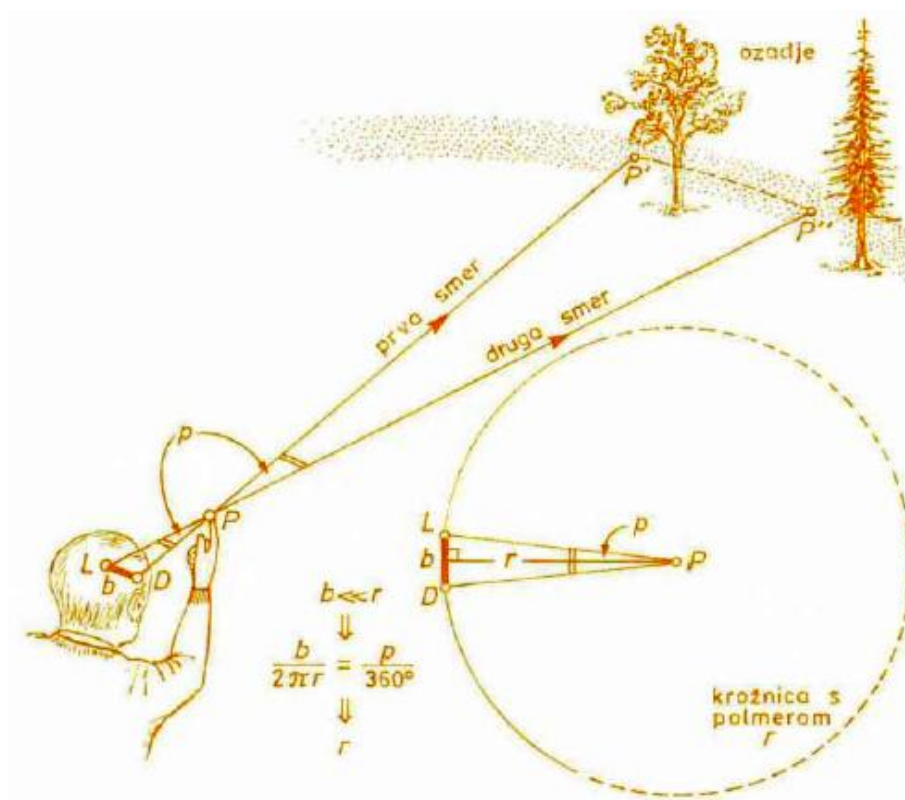
Enačba 4: Izražanje geografske dolžine v urah

Prištejemo količino časa, ki je minila od polnoči do izbranega trenutka. To je zadnji člen enačbe, kjer je t čas po sončevi uri, t_0 sta popravka, ki jih uporabljamo (časovni pas in poletni čas). Pri nas poleti znaša 2 uri, pozimi pa 1 uro. V zadnjem členu imamo to razmerje, ker je sončni dan daljši od zvezdnega, torej enota časa v prvem predstavlja večji delež kot v drugem.

2.2 Paralaksa [1]

Paralaksa je kót, ki je izražen pri opazovanju enega predmeta z več točk. Je kot med zveznicama gledališč z opazovanim predmetom. Imenuje se tudi paralaktični kot in ga označujemo s p . Ponazorimo si, če prst držimo pred obrazom in ga opazujemo s posameznim očesom. Opazimo, da se zaradi zamenjave perspektive glede na ozadje navidezno premakne (slika 6). Razdalja med gledališčema L in D se imenuje baza. Ker je razdalja med bazo in predmetom r mnogo večja od baze, lahko predvidimo, da je baza lok na krožnici s središčem v predmetu. Tako lahko napišemo zvezo na sliki 6, iz katere lahko izračunamo neznanko r . Večja kot je baza in bližje kot je predmet, večji je kot in večji je navidezen premik – paralaksa.

¹ Efemeride so zbirke podatkov, kjer so podani časi vzidov in zaidov, vrednosti koordinat itn. za posamezna astronomska telesa na določene dneve. V Sloveniji je to zbirka Naše nebo, ki jo izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.



Slika 6: Paralaksa

2.2.1 Dnevna paralaksa [1]

Zaradi bližine je paralaksa lažje opazna pri objektih našega Osončja, npr. planetov, Lune, kometov in asteroidov. Pri njih se pogovarjamo o dnevni paralaksi. Pri tem je polmer našega planeta baza. Nekateri avtorji uporabljajo izraz obzorna ali horizontalna paralaksa. Ta je prisotna pri opazovanju teles s površja Zemlje, ko so ti na obzorju, to je, ko vzhajajo in zahajajo.

2.3 Dosedanje raziskave

Paralaksa je bila teoretično znana starim Grkom, npr. Hiparhu in Ptolemaju. Toda zaradi pomanjkljivih instrumentov jim zvezdne paralakse ni uspelo opaziti. Zato so pa poskušali izmeriti Lunino, vse z namenom izmeriti vesoljske razdalje [3],[4],[5].

V sodobni dobi je astronomija na dosegu širših množic in tudi merjenje lunine paralakse je postalo dostopno amaterjem. Izvedenih je bilo več projektov, npr.²:

- mednarodnim letom astronomije 2009
http://www2.arnes.si/~gljsentvid10/razdalja_zemlja_luna_mla2009.html
- projekt pod vodstvom Uda Backhaus
<http://www.didaktik.physik.uni-duisburg-essen.de/~backhaus/moonproject.htm>
- Lunar Parallax Demonstration Project
http://www.digitalsky.org.uk/lunar_parallax.html

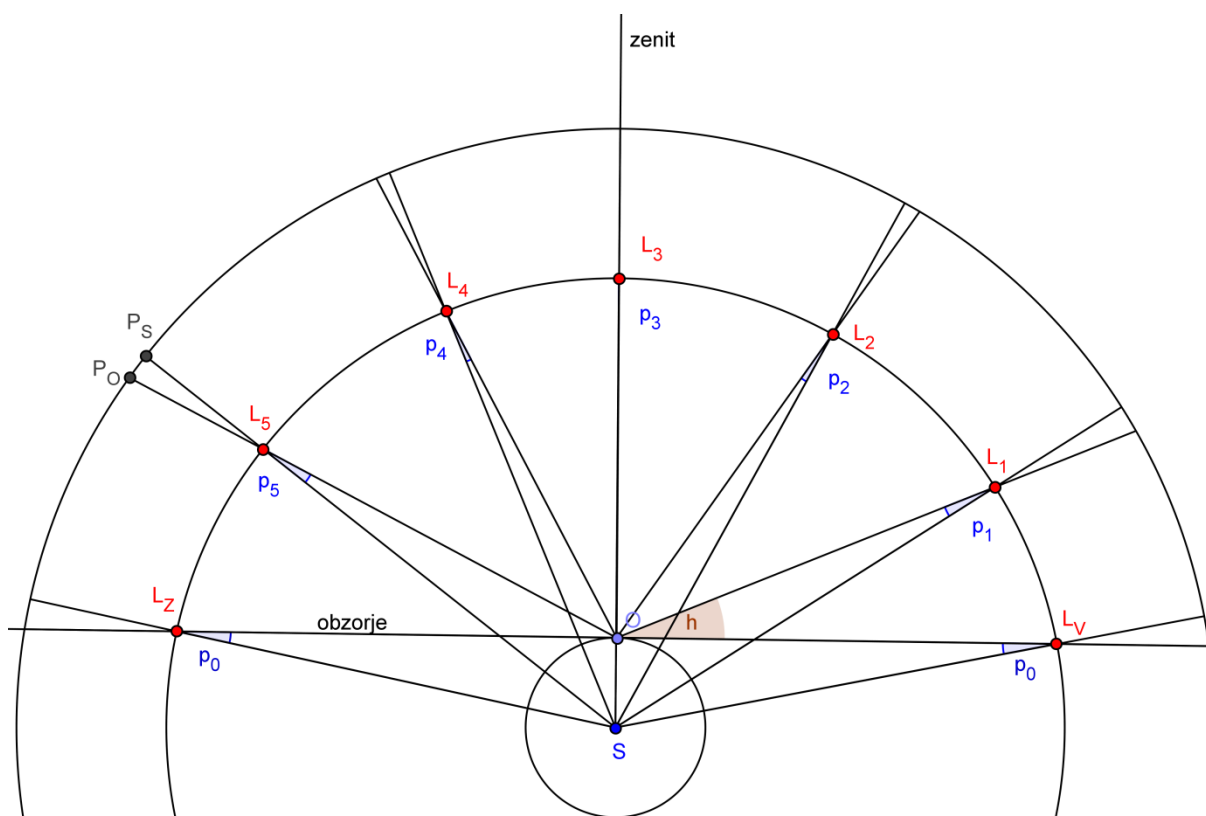
² Spletne povezave so bile pridobljene 21. 2. 2013.

2.4 Predstavitev metode dela

Prvotni ideji sem prevzel od dr. Uda Backhaus, profesorja na Fakulteti za fiziko Univerze v Duisburg-Essnu. [10] Od njega sem uporabil zamisli določitve hitrosti spreminjanja geocentrične rektascenzije Lune in določitve paralakse v rektascenziji.

2.4.1 Dnevna paralaksa

Ko se Zemlja vrti, se višine Lune, planetov ali Sonca na nebu večajo do kulminacije, potem pa padajo. To si razložimo ob sliki 7. Krožnica na sredini je Zemlja s središčem S. Na površju je opazovalec O. OS je polmer Zemlje, tangenta skozi O je opazovalčevo obzorje in poltrak z začetkom v S, ki gre skozi O, je smer proti zenitu opazovalca. Loka okoli Zemlje imata središče prav tako v točki S, ker sta to sferi, ki prenašata Luno in zvezde stalnice. Ker se nebo (navidezno) vrti, se ti dve sferi vrtita. Praktično bi se morala Lunina počasneje kot zvezdna zaradi njenega lastnega kroženja okoli Zemlje. V praksi je opazno, kako spreminja svojo lego glede na zvezde, toda pri tej razlagi bomo to zanemarili (pri izračunih zagotovo ne smemo). Na Lunini krogli imamo točke od L_V do L_Z . To so položaji Lune ob različnih trenutkih v eni noči.³ Kot p_0 je obzorna paralaksa. Višino Lune predstavlja kot med obzorjem in zveznico z Luno (npr. h). Za vsak položaj je označen kot paralakse ($p_0, p_1 \dots p_5$). Opazimo, da se z naraščanjem višine paralaksa zmanjšuje ($p_0 > p_1 > p_2 > p_3, p_3 = 0$ in $p_3 < p_4 < p_5 < p_0$).



Slika 7: Skica spreminjanja Lunine paralakse

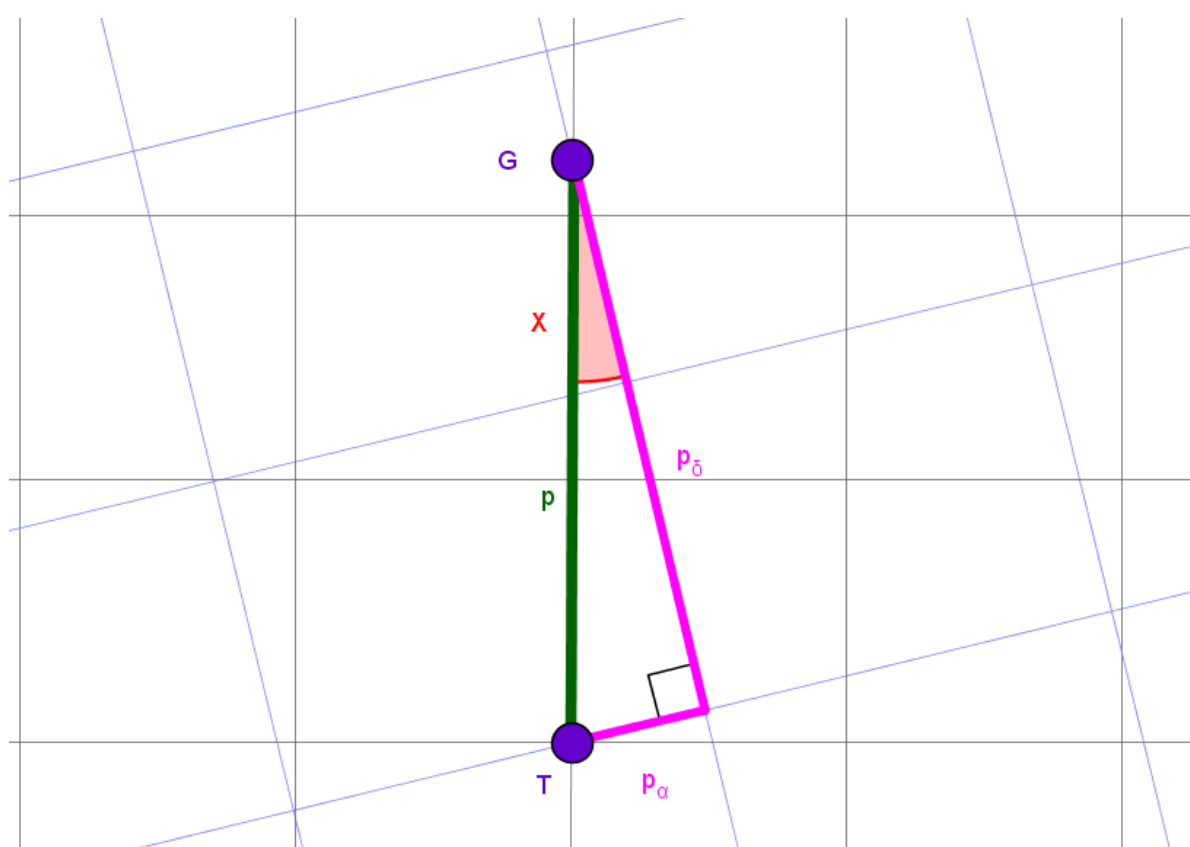
Ekvatorialni koordinatni sistem obravnavamo, kot da je na zvezdni sferi. Zato ugotavljamo koordinati projekcij Lune na to kroglo (P_O in P_S). Če merimo iz O, sta to topocentrični koordinati, če pa iz S, sta pa geocentrični. Zaradi premika perspektive je na skici ta razlika kot

³ S takšnim sistemom so si stari Grki razlagali zgradbo kozmosa. Če bi bili dosledni, bi na skici bila ena točka L in več točk O, ker se vrti Zemlja in ne nebo.

$P_O L_5 P_S$, kar je enako Lunini paralaksi v petem položaju. Torej se topocentrični. koordinati razlikujeta od geocentričnih. zaradi paralakse.

Ta skica prikazuje ravnino, na kateri so Luna, središče Zemlje in opazovalec. Ko nebo kroži, se objektom ves čas spreminjata višina in azimut. Spreminjanje višine je upoštevano, toda spreminjanje azimuta ni. Predstavljajmo si, da se ravnina skice vrti okoli poltraka SO , kar simbolizira spreminjanje azimuta. Ker pri tem ostaja višina enaka, je enak tudi paralaktični kot. Torej azimut in paralaksa nimata neposrednih medsebojnih vplivov.

Zamislimo si, da na nebo označimo topo- in geocentrični položaj Lune ob istem trenutku (slika 8). To dvojje predstavljata točki T in G . Glede na prejšnje ugotovitve ima geocentrični položaj večjo višino kot topocentrični, oba pa imata enak azimut. Torej sta obe točki na istem poldnevniku (višinskem krogu). Razlika med koordinatama je paralaksa. Torej je to lok p med točkama G in T .



Slika 8: Upodobitev paralakse na nebesni sferi⁴

Točki G in T sta na različnih položajih zaradi paralakse in zato se njune ekvatorialne koordinate med sabo razlikujejo. Ti razliki imenujmo paralaksa v rektascenziji oz. rektascenzijska paralaksa p_α in paralaksa v deklinaciji oz. deklinacijska paralaksa p_δ . To sta komponenti paralakse, ki sta med sabo pravokotni.

⁴ Ekvatorialni sistem je poenostavljeno upodobljen kot pravokoten, kar je v približku res, ker obravnavamo majhen odsek sfere.

Če ima G koordinati α_G in δ_G ter T α_T in δ_T , potem je:

$$|\alpha_T - \alpha_G| \cos \delta = p_\alpha$$

Enačba 5: Rektascenzijska paralaksa

$$|\delta_T - \delta_G| = p_\delta$$

Enačba 6: Deklinacijska paralaksa

Predstavljajmo si razliko med rektascenzijama kot lok na rektascenzijskem krogu. Če je ta krog bliže nebesnemu ekvatorju, je lok večji v primerjavi z lokom, ki je bliže nebesnemu polu. Torej je velikost loka odvisna tudi od Dec, kar vidimo v enačbi Enačba 5 kot $\cos \delta$.

Rektascenzijska paralaksa je upodobljena na rektascenzijskem krogu, ker so na tem krogu točke, ki imajo enake Dec in se razlikujejo v Ra. Deklinacijska paralaksa je upodobljena na deklinacijskem krogu, ker so na tem krogu točke z enakimi Ra in različnimi Dec. Torej je med tema dvema lokoma pravi kot. Se pravi, da imamo opravek s pravokotnim sfernim trikotnikom, v katerem sta kateti p_α in p_δ ter hipotenuza p . Zapišimo sinusni izrek za ta sferni trikotnik: [7]

$$\frac{\sin p}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin p_\alpha}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad \sin p = \frac{\sin p_\alpha}{\sin x}$$

Enačba 7: Izračun paralakse

Pri tem je x kot med poldnevnikom in Dec krogom. Ta kot ni vedno enak. To je razvidno na sliki 2 na strani 7. Ob obzorju na sredi je črka V in na desni J, kar označuje smeri neba. Vidimo, da se kot med poldnevniki in Dec krogi (x) manjša, ko gremo od vzhoda proti jugu in proti severu. Na jugu imamo glavni meridijan, ki se pokriva z Dec krogom. Glede na sliko 8 je potem paralaksa enaka deklinacijski paralaksi. Se pravi, da se geocentrični in topocentrični koordinati Lune razlikujeta samo v deklinaciji, v rektascenziji pa sta enaki.

2.4.2 Nebesni sferni trikotnik

Da bomo lahko izračunali paralakso, moramo najprej izračunati kot x . To bomo izpeljali iz nebesnega sfernega trikotnika, ki leži na zahodni polobli nebesne sfere [8]. Na sliki 9 imamo skico nebesne sfere. Predstavlja jo krožnica, ki je praktično glavni meridijan opazovalca (O). Ta je v središču krogle, na kateri je Luna (L). To projiciramo na obzorje (L') in na nebesni ekvator (L''). Točka Z je zenit in točka P je severni nebesni pol. Označeni kot med smerjo proti L' in med severom je azimut (A). Drugi kot med smerjo proti L' in severom je A', ki je $360^\circ - A$. Če si zamislimo, da ležijo Z, L in L' na eni ravnini, je potem kot med to ravnino in ravnino glavnega meridijana kot A'. Potem je to tudi kot med lokoma ZL in ZP. Lok med P in L je del Dec kroga, ki tudi leži na svoji ravnini. Kot med to ravnino in ravnino glavnega meridijana je časovni kot (H). Tretji kot v tem trikotniku je kot x .

Kot (in hkrati lok) med L' in L je višina (h). Ker je kot med Z in L' pravi, potem je lok ZL dolg $90^\circ - h$. Kot (in hkrati lok) med L'' in L je deklinacija (δ). Ker je kot med OP in L'' tudi pravi, je lok s krajiščema P in L $90^\circ - \delta$. Višina severnega nebesnega pola v je enaka geografski širini opazovališča (φ). Torej je kot med P in Z komplementaren geografski širini.

Tabela 1: Koti in nasprotni loki v nebesnem sfernem trikotniku na zahodni polobli

Koti	H	A' ($360^\circ - A$)	x
Nasprotni loki	$90^\circ - h$	$90^\circ - \delta$	$90^\circ - \varphi$



Spomnimo se, da je $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ in $\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$. Enačbo lahko poenostavimo:

$$\frac{\sin H}{\cos h} = -\frac{\sin A}{\cos \delta} = \frac{\sin x}{\cos \varphi}$$

~ 14 ~

Zdaj pa si še predstavljajmo to situacijo na vzhodni polovici nebesne krogle. Loki imajo enake velikosti, kot je bilo opisano. Za razliko od prejšnjega položaja imamo namesto kota A' kar azimut A. Namesto časovnega kota H pa $360^\circ - H$. Enačba bo potem:

$$\frac{\sin(360^\circ - H)}{\sin(90^\circ - h)} = \frac{\sin A}{\sin(90^\circ - \delta)} = \frac{\sin x}{\sin(90^\circ - \varphi)} \Rightarrow -\frac{\sin H}{\cos h} = \frac{\sin A}{\cos \delta} = \frac{\sin x}{\cos \varphi}$$

Opazimo, da sta enačbi skoraj enaki, razlika je le v negativnem predznaku. Minus smo vpeljali, da smo poenostavili enačbe in skrbi, da so členi pozitivni. Praktično se ga lahko znebimo, tako da pri prvem in drugem členu uporabimo absolutno vrednost. Zdaj dobimo za oba primera, ko je Luna na vzhodni ali zahodni polobli, enotno enačbo:

$$\frac{|\sin H|}{\cos h} = \frac{|\sin A|}{\cos \delta} = \frac{\sin x}{\cos \varphi} \Rightarrow \sin x = \frac{|\sin H| \cos \varphi}{\cos h} = \frac{|\sin A| \cos \varphi}{\cos \delta}$$

Enačba 8: Izračun kota x

2.4.3 Hitrost in izračun paralakse

Ugotovitev, da sta geocentrična in topocentrična Ra med kulminacijo enaki, je ključna za nadaljnji postopek. V eni noči določimo rektascenzijo (α_1) Lune, medtem ko kulminira. Ker je takrat rektascenzijska paralaksa nič, potem je izmerjena (topocentrična) vrednost enaka geocentrični. To storimo še enkrat (α_2) med kulminacijo v drugi noči. Iz znanega časovnega intervala (t), ki je vmes potekel, lahko izračunamo hitrost spreminjanja lunine geocentrične Ra. Recimo temu rektascenzijska hitrost:

$$v_\alpha = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t}$$

Enačba 9: Rektascenzijska hitrost

Izmerimo (topocentrično) Ra (α_T), ki se od geocentrične (α_G) razlikuje za rektascenzijsko paralakso (p_α). Nazadnje, ko smo med kulminacijo merili Ra, smo dobili (geocentrično) vrednost α' . Če časovni interval, ki je minil med meritvama (t), pomnožimo s hitrostjo spreminjanja Ra (v_α), dobimo razliko med geocentričnima koordinatama druge in prve meritve ($\alpha_G - \alpha'$). To razliko prištejemo α' in dobimo α_G . Razlika med tem in izmerjeno Ra (α_T) je p_α .

$$(\alpha_T - (\alpha' + v_\alpha \cdot t)) \cos \delta = (\alpha_T - (\alpha' + \alpha_G - \alpha')) \cos \delta = (\alpha_T - \alpha_G) \cos \delta = p_\alpha$$

Enačba 10: Izračun rektascenzijske paralakse

Zdaj še uporabimo sinusni izrek, v katerem nastopata p_α in kot x, in iz njega izračunamo paralakso.

2.4.4 Oddaljenost

Vrnimo se k sliki 7 na strani 11. Imamo trikotnik z oglišči S, O in L. Stranica SO je Zemljin polmer r, SL je oddaljenost Lune d, kot SOL je $90^\circ + h$ in kot SLO je paralaksa p. Sinusni izrek⁵ za ta trikotnik je:

$$\frac{\sin p}{r} = \frac{\sin(90^\circ + h)}{d} \Rightarrow \frac{\sin p}{r} = \frac{\cos h}{d}$$

⁵ $\sin \alpha / a = \sin \beta / b = \sin \gamma / c$

Od tod lahko izračunamo oddaljenost Lune d :

$$d = \frac{r \cos h}{\sin p} = \frac{r \cos h \sin x}{\sin p_\alpha} = \frac{r \cos h |\sin H| \cos \varphi}{\sin p_\alpha \cos h} = \frac{r |\sin H| \cos \varphi}{\sin p_\alpha}$$

Enačba 11: Oddaljenost iz H

$$d = \frac{r \cos h}{\sin p} = \frac{r \cos h \sin x}{\sin p_\alpha} = \frac{r \cos h |\sin A| \cos \varphi}{\sin p_\alpha \cos \delta}$$

Enačba 12: Oddaljenost iz h, A in δ

Če želimo uporabiti drugo enačbo, moramo poznati tudi azimut in višino. To dvojje lahko izračunamo iz višinske in azimutne enačbe: [8]

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H$$

Enačba 13: Višinska enačba

$$\cos A = \frac{\sin \delta - \sin \varphi \sin h}{\cos \varphi \cos h}$$

Enačba 14: Azimutna enačba

2.4.5 Časovni kot

Časovni kot, ki je potreben v enačbi 11, lahko izračunamo, če poznamo rektascenzijo med zadnjo kulminacijo (α_1), Ra izbranega trenutka (α_2), za katerega računamo oddaljenost in časovno razliko (Δt). Ker je med kulminacijo časovni kot nič, je potem lokalni siderski čas enak α_1 . Če je t_1 čas kulminacije in S_1 lokalni siderski čas med kulminacijo, potem je lokalni siderski čas v drugem trenutku:

$$S = S(0^h UT) + \lambda + (t_1 + \Delta t - t_0) \frac{366,2422}{365,2422} = S_1 + \Delta t \frac{366,2422}{365,2422} = \alpha_1 + \Delta t \frac{366,2422}{365,2422}$$

Potem je

$$H = \alpha_1 + \Delta t \frac{366,2422}{365,2422} - \alpha_2$$

Enačba 15: Časovni kot meritve

3 Praktični del

Vrnimo se k prvi stopnji postopka, določevanju hitrosti spreminjanja rektascenzije. Lunino gibanje v prostoru okoli Zemlje je zapleteno. Ne le, da ima eliptično orbito in nima stalne hitrosti, ampak je nagnjena za približno 5° glede na ravnino Zemljinega ekvatorja. Poleg tega se orbita stalno spreminja. Zato se ji na nebu koordinati ne spreminjata enakomerno. Preverimo, kako dolgo je izračunana hitrost veljavna. Izračunajmo hitrost med dvema kulminacijama in primerjajmo s hitrostjo med naslednjimi kulminacijami.

Tabela 2: Spreminjanje hitrosti

datum prvega izračuna	hitrost [°/h]	en dan kasneje [°/h]	dva dni kasneje [°/h]	tri dni kasneje [°/h]
19.1.	0,508	0,516	0,524	0,529
7.3.	0,599	0,577	0,554	0,537
14.6.	0,489	0,498	0,517	0,543
27.8.	0,528	0,528	0,525	0,520
3.9.	0,497	0,497	0,497	0,514
30.10.	0,506	0,525	0,439	0,690
22.12.	0,474	0,481	0,485	0,501

V prvem stolpcu so datumi noči, ko je merjena prva Ra. Druga Ra je merjena naslednjo noč. Ta dva podatka uporabimo za izračun hitrosti, ki je podana v drugem stolpcu. Ostali trije podajajo hitrosti v naslednjih intervalih. Opazimo, da se hitrosti opazno in pri vsaki meritvi spreminjajo.

3.1 Priprave na terensko zbiranje podatkov

Terensko delo te naloge je merjenje Luninih nebesnih koordinat. To bi lahko naredili na več načinov, npr. da bi jo opazovali z daljnogledom ali s prostimi očmi in jo vrisali v zvezdno karto, iz katere bi odčitali koordinate. Lahko bi s pomočjo njene sence izmerili azimut in višino ter izračunali ekvatorialni koordinati. Tretja možnost je s fotografiranjem, kar je verjetno najnatančnejše.

3.1.1 Fotografiranje

Ker bomo morali določiti točke ne robu Lune, mora biti rob oster. Toda zahtevno je doseči oboje. Da bodo opazne šibkejšje zvezde, moramo povečati občutljivost fotoaparata ali nastavimo daljši čas. S tem pa postane Luna presvetljena (slika 10).

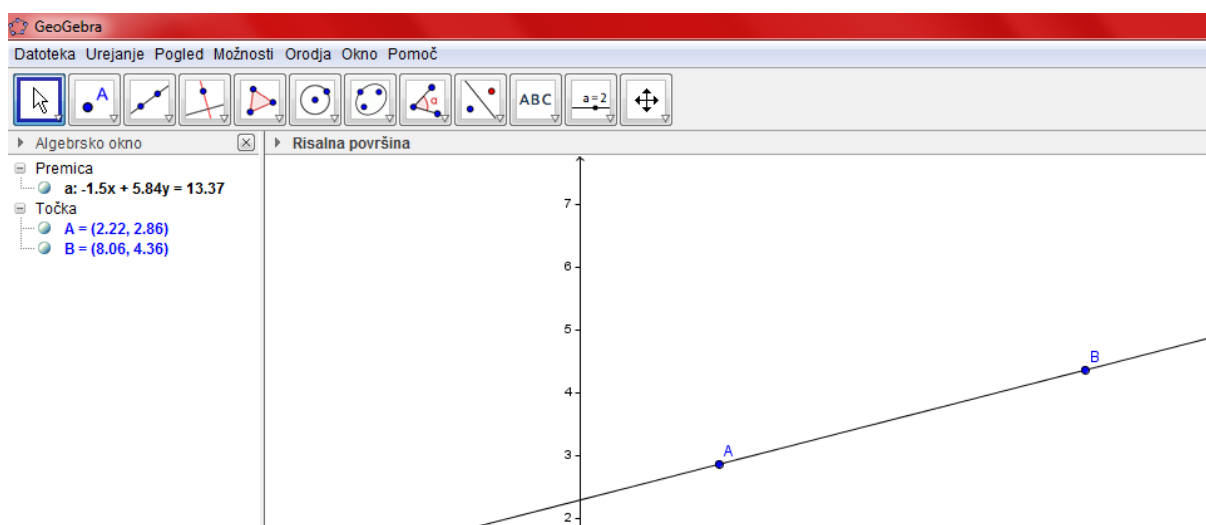


Slika 10: 67-odstotna osvetljenost površja [8]

Luno moramo fotografirati dvakrat. Prvič z daljšo ekspozicijo (npr. dve sekundi), pri čemer so vidne zvezde, ampak je Luna presvetljena. Na drugi fotografiji s krajšo ekspozicijo, npr. 1/500 s, zvezd ni, je pa oster rob. Te dve sestavimo v eno. V podrobnosti bi morali upoštevati časovno razliko med posnetkoma, ampak ta je lahko zanemarjena. Če fotoaparat ni nameščen na trdnem stojalu, se malo premakne pri spreminjanju časa zajemanja med fotografijama. Tako ne moremo enostavno položiti ene fotografije na drugo, ampak je treba eno zamakniti (in rotirati).

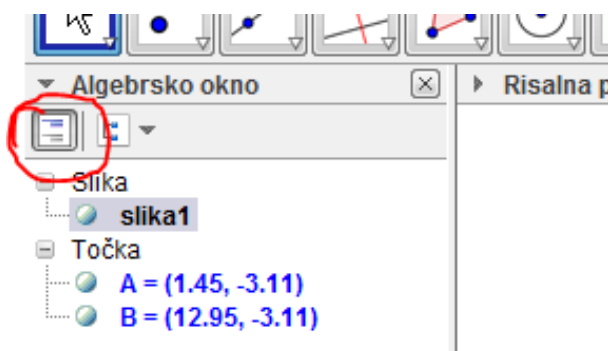
3.2 Pridobivanje podatkov iz fotografije

3.2.1 GeoGebra



Slika 11: GeoGebra

Skozi ves postopek bomo uporabljali računalniški program GeoGebra [13]. To je matematični program, kjer ustvarjamo geometrične konstrukcije (slika 11). To delamo v koordinatnem sistemu na risalni površini. Z objekti upravljamo tako, da naredimo na njih desni klik in izberemo lastnosti. Na levi imamo algebrsko okno, kjer je seznam objektov z risalne površine (točke, premice, mnogokotniki, koti, stožnice ...). Tam lahko odčitavamo koordinati točk, enačbe premic, velikosti kotov itd. Z zelenim gumbom ob njih lahko upravljamo vidnost. Če na seznamu niso prisotne uporabljene slike kot na sliki 11, potem kliknemo na puščico ob napisu "Algebrsko okno". Pokažeta se še dva gumba in kliknemo levega: "Pomožni objekti" (slika 12).

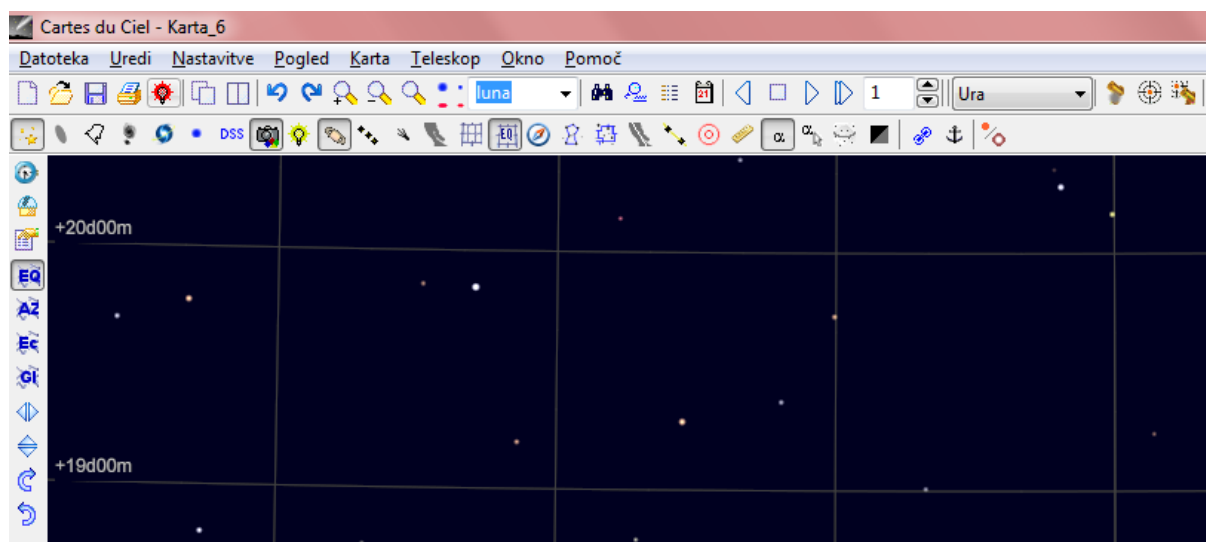


Slika 12: Prikaz pomožnih objektov

Nad tem imamo 11 gumbov, kjer izbiramo objekte, ki jih želimo narisati, in orodja, s katerimi upravljamo konstrukcijo. V spodnjem desnem kotu gumbov so trikotniki. Ko kliknemo na

njih, se nam odpre seznam več objektov ali orodij. Za premikanje objektov moramo izbrati orodje "Premikanje" na prvem gumbu – kot na sliki. Za premikanje celotne risalne površine moramo izbrati orodje na zadnjem gumbu "Premakni pogled na risbo" ali držimo tipko "Shift". Namesto decimalne vejice moramo uporabljati piko.

3.2.2 Cartes du Ciel



Slika 13: Cartes du Ciel

Cartes du Ciel je planetarij, tj. računalniški program, ki nam simulira nebo [14]. Na levi strani okna imamo meni, kjer spremenimo čas (prvi gumb) in lokacijo (drugi gumb) opazovanja (slika 13). Z naslednjimi štirimi gumbi spreminjamo uporabljene koordinatne sisteme. Predvsem bomo potrebovali ekvatorialnega. Nad karto imamo vodoravni meni, kjer spreminjamo prikaz. Med njimi je gumb "Prikaži ekvatorialno mrežo". Karto premikamo tako, da držimo tipko "Shift", kliknemo in premikamo miško. Če dvakrat kliknemo na objekt, dobimo o njem več podatkov. Če ga želimo postaviti na sredino karte, kliknemo z desnim miškinim gumbom in izberemo "Usredišči". Karto lahko shranimo kot sliko, če izberemo "Datoteka" in "Shrani sliko".

3.2.3 Postavitev fotografije

Iz fotografije bomo pridobili podatke, iz katerih bomo izračunali ekvatorialni koordinati središča Lune. Da bo to sploh mogoče, jo moramo pred tem ustrezno umestiti v koordinatni sistem. Dotikališče (središče fotografije) mora biti v koordinatnem izhodišču. Najprej moramo fotografijo tako zavrteti, da se deklinacijski krog, na katerem je dotikališče, pokriva z ordinato.

Nadaljnji postopek bo razložen ob obdelavi fotografije, ki sem jo posnel 19. 10. 2012 ob 19:30:31. To sem obdelal v Adobe Photoshopu, kjer sem poudaril zvezde, da so šibkejše boljše vidne. Naložimo jo v GeoGebro ("Urejanje" → "Vstavi sliko" → "Datoteka"). Preverimo, kolikšni sta dimenziji fotografije ($a \times b$). Spodnji levi kot je točka A in spodnji desni točka B. Prvi v lastnostih nastavimo položaj $(-a/2, -b/2)$ ter drugi $(a/2, -b/2)$. Zdaj je dotikališče v izhodišču. To naj bo točka C s položajem $(0,0)$.

V planetariju poiščemo področje na fotografiji in usrediščimo dotikališče. Karta mora biti ekvatorialna, zato da je Dec krog dotikališča navpičen. Karto shranimo kot sliko in naložimo

v GeoGebri. Odpremo lastnosti in v zavihku "Barva" zmanjšamo prosojnost obema slikama, tako da sta obe vidni, ko se pokrivata. Karto premaknemo tako, da sta dotikališča na karti in fotografiji pokrita. Čim dlje stran poiščemo še eno zvezdo na fotografiji in isto zvezdo na karti in na obeh mestih ustvarimo novi točki (F na karti in G na fotografiji). Narišemo kot FCG, tako da izberemo orodje "Kot" na osmem gumbu in zapovrstjo kliknemo na točke F, C in G. Odpremo lastnosti kota in izberemo "Kot med 0° in 180°". Za ta kot moramo vrteti našo fotografijo. Izberemo orodje "Vrtenje okrog točke za dani kot" na seznamu pri devetem gumbu. V algebrskem oknu najprej izberemo fotografijo, nato točko C, vpišemo kot vrtenja in ustrezno smer vrtenja. Nastane nova slika in prejšnja ostane; izklopimo ji vidljivost, da ne moti. Fotografija je zdaj pravilno orientirana.

3.2.4 Določevanje položaja središča

Ker je Luna večje astronomsko telo, bomo določevali koordinate za njeno središče. Pri tem upoštevamo, da ima obliko kroga. Njen rob je krožnica s polmerom r , kjer so točke s kartezičnima koordinatama x in y . Središče krožnice ima koordinati x_s in y_s . Potem velja enačba krožnice:

$$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = r^2$$

Enačba 16: Enačba krožnice

V programu za vsako slikovno točko (piksel) določimo koordinati. To storimo za več slikovnih točk, ki predstavljajo rob Lune. Od vsake trojice točk uporabimo koordinati v sistemu treh enačb in izračunamo x_s in y_s . Povprečje izračunanih koordinat sta koordinati središča. Napako meritve izračunamo tako:

$$\Delta x_s = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_N - \bar{x}|}{N}$$

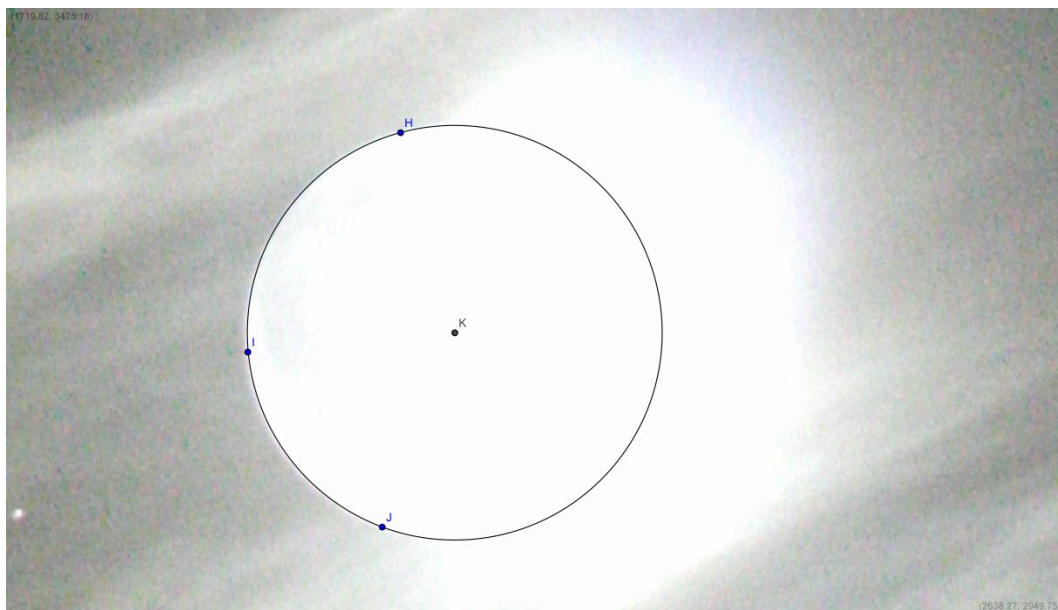
Enačba 17: Napaka x koordinate

$$\Delta y_s = \frac{|y_1 - \bar{y}| + |y_2 - \bar{y}| + \dots + |y_N - \bar{y}|}{N}$$

Enačba 18: Napaka y koordinate

Pri čemer sta x_s in y_s koordinati središča, $x_1, x_2, \dots, x_N$ in $y_1, y_2, \dots, y_N$ so izračunane koordinate središča in N je število izračunov [12].

Zadeve se lahko lotimo tudi geometrično. Izberemo orodje "Krožnica skozi tri točke" na seznamu pri šestem gumbu in kliknemo na tri mesta na Luninem robu. Izberemo "Središče daljice ali kroga" na seznamu pri drugem gumbu in kliknemo na prej narisano krožnico. Zdaj imamo krožnico, ki predstavlja rob, in središče te krožnice, ki je središče Lune (slika 14). V "Algebrskem oknu" na levi odčitamo koordinati središča. Na vrhu gremo pod "Možnosti" in "Zaokroži" ter izberemo ustrezno število decimalnih mest. S premikanjem točk po robu lahko večkrat odčitamo položaj središča, da bomo lahko izračunali napako meritve. Za lažje delo si nastavimo karto nevidno in v lastnostih fotografije pri barvi nastavimo 100 %.



Slika 14:Določevanje središča

3.2.5 Merilo

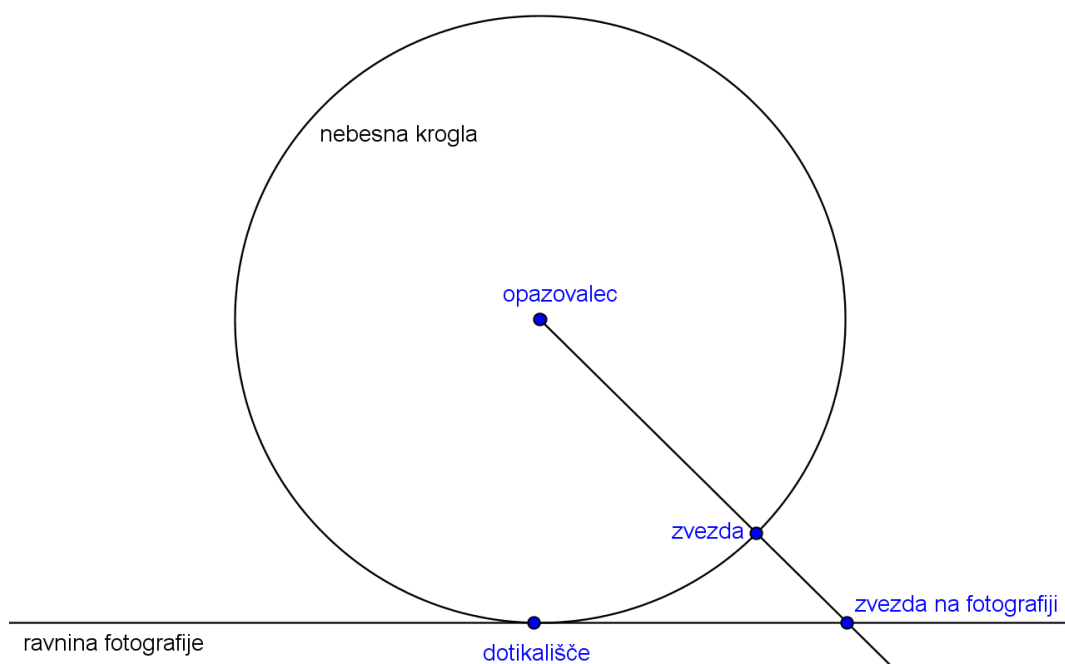
Kasneje bomo potrebovali podatek, koliko slikovnih točk predstavlja en radian na nebu. Izberemo si zvezdo, ki je od dotikališča oddaljena približno toliko kot središče Lune. Pomagamo si tako, da izberemo orodje "Krožnica s središčem in točko na njej" pri šestem gumbu. Kliknemo na C in središče Lune. Izberemo zvezdo, ki je najbližje krožnici. Najprej izračunamo razliki v ekvatorialnih koordinatah zvezde in dotikališča, $\Delta\alpha$ in $\Delta\delta$, tako da sta razliki pozitivni. Nato lahko izračunamo število m :

$$m = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} * 180}{\cos^{-1}(\cos \Delta\delta * \cos \Delta\alpha) * \pi}$$

Enačba 19: Merilo

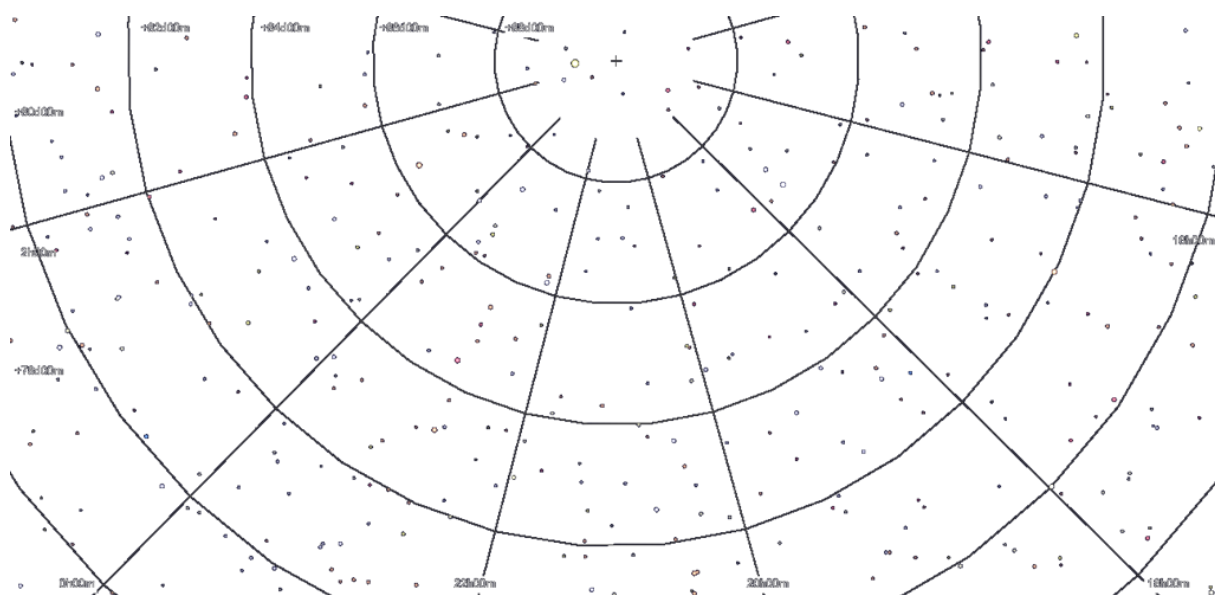
3.2.6 Matematična podlaga [15]

Nebo si predstavljamo kot kroglo, kjer smo mi njeno središče. Fotografijo pa dojemamo kot odsek ravnine, ki je tangenta na nebesno sfero, pri čemer je dotikališče središče fotografije. Nebesna telesa se z gnomonsko projekcijo projicirajo na ravnino oz. fotografijo (slika 15).



Slika 15: Projiciranje na fotografijo

Pri tej projekciji se Dec krogi in nebesni ekvator preslikajo v ravne premice. Dec krog, na katerem je dotikališče, je pravokoten na ekvator, drugi krogi pa niso. Vsi se sekajo v nebesnem polu, kar je vidno na sliki 16. Ra krogi imajo različne projekcije, elipse, parabole ali hiperbole, odvisno od deklinacij dotikališča in kroga.



Slika 16: Nebesni koordinatni sistem na ravnini

Mi lahko iz znanega položaja projekcije izračunamo ekvatorialni koordinati nebesnega telesa s pomočjo naslednjih enačb: [16]

$$D = \tan^{-1} \left(\sqrt{\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \left(\frac{y}{m}\right)^2} \right)$$

Enačba 20: D

$$B = \tan^{-1} \left(-\frac{x}{y} \right)$$

Enačba 21: B

$$\alpha = \alpha_0 - \tan^{-1} \left(\frac{\sin D \sin B}{\cos \delta_0 \cos D + \sin \delta_0 \sin D \cos B} \right)$$

Enačba 22: Izračun rektascenzije

$$\delta = \sin^{-1}(\sin \delta_0 \cos D - \cos \delta_0 \cos B \sin D)$$

Enačba 23: Izračun deklinacije

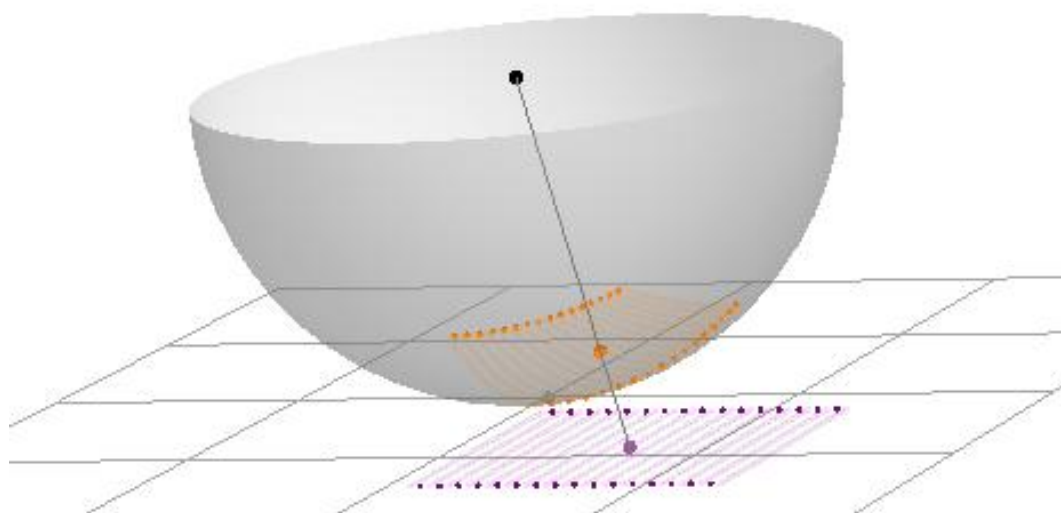
Pozorni moramo biti, ko računamo kot B. Določen tangens imata dva kota, ki se razlikujeta za 180° . Ko z računalom računamo inverzni tangens, nam računalno vrne npr. samo ostri kot, čeprav je možna rešitev tudi kot, ki je večji za 180° . Kateri kot uporabiti, je odvisno od položaja Lune v pravokotnem koordinatnem sistemu v GeoGebri (tabela 3). Če kot, ki ga izračunamo, ni primeren, prištejemo ali odštejemo 180° .

Tabela 3: Kot B v odvisnosti od x in y Luninega središča

x	y	B
+	+	$90^\circ < B < 180^\circ$
-	+	$180^\circ < B < 270^\circ$
-	-	$270^\circ < B < 360^\circ$
+	-	$0^\circ < B < 90^\circ$

3.2.7 Napaka ekvatorialnih koordinat

Našemu izračunu moramo določiti tudi napako. Ta izhaja iz napake položaja središča Lune v pravokotnem koordinatnem sistemu na fotografiji (Δx , Δy). Pri tem si jo lahko praktično predstavljamo kot pravokotnik na fotografiji, s stranicama $2\Delta x$ in $2\Delta y$. Na sredini je središče. Če ta pravokotnik preslikamo na nebesno kroglo, dobimo napako ekvatorialnih koordinat oz. napako meritve. Toda pri tej preslikavi se pravokotnik ne preslika v obliko, ki bi jo lahko enostavno matematično izrazili (slika 17).



Slika 17: Preslikava z ravnine na kroglo

V praksi je ta razlika minimalna, npr. v ponazoritvenem primeru (tabela 4).

Tabela 4: Rezultati ponazoritvenega primera

x	y	α	δ	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
povpr.	povpr.	17 ^h 36 ^m 52,1 ^s	-21° 39' 45,9"	-	-
min	min	17 ^h 36 ^m 52,6 ^s	-21° 39' 48,4"	+0,498 ^s	+2,51"
min	max	17 ^h 36 ^m 52,6 ^s	-21° 39' 43,5"	+0,501 ^s	-2,41"
max	min	17 ^h 36 ^m 51,6 ^s	-21° 39' 48,3"	-0,501 ^s	+2,41"
max	max	17 ^h 36 ^m 51,6 ^s	-21° 39' 43,4"	-0,498 ^s	-2,51"

Pri definiranju napake ne moremo ravnati, kot smo pri določevanju napake meritve središča Lune. Iz kombinacij x, y koordinat smo petkrat izračunali ekvatorialni koordinati, pri čemer so te vse obravnavane kot točne. Zato moramo določiti napako meritve tako, da bodo vse te vrednosti med najmanjšo in največjo vrednostjo meritve. Za napako privzamemo absolutno vrednost največjega odstopanja od vrednosti izračunane iz povprečnih vrednosti x in y.

$$\Delta\alpha = \pm 0,5^s$$

$$\Delta\delta = \pm 2,5''$$

Glede na Cartes du Ciel sta pravi vrednosti 17^h 37^m 1,44^s in -21° 40' 36,1". Povprečna vrednost Ra je premajhna za 10,34^s in povprečna vrednost Dec je (absolutno gledano) premajhna za 50,2".

3.3 Simulacije

Da sem (teoretično) preveril veljavnost metode, sem opravil nekaj simulacij. V Cartes du Ciel sem nastavljal za kraj opazovanja našo šolo ($\varphi = 46^\circ 10' 31''$, $\lambda = 15^\circ 27' 3''$, nad. viš. 198 m) in shranil slike Lune med zvezdami, ki sem jih uporabil namesto fotografij. V tabelah od Tabela 5 do Tabela 9 so podani rezultati simulacij. V prvih treh stolpcih je navedeno, katere vrednosti so bile uporabljene v računih (m-minimum, M-maksimum). α_1 in α_3 sta rektascenziji, uporabljeni za računanje hitrosti in α_2 je Ra primera, pri katerem izračunamo oddaljenost. V zadnjem stolpcu so odstopanja izračunov od povprečne vrednosti (tj. končnega rezultata) in na koncu odstopanje končnega rezultata od pravilne vrednosti. Za določevanje napake meritve uberemo enako logiko kot pri določevanju napak ekvatorialnih koordinat. Vsi rezultati so enakopravni in jih moramo vključiti v interval, določen z napako, ki predstavlja meritev. Zato kot napako obravnavamo največje odstopanje od končnega rezultata.

Pri vseh podanih izračunih je uporabljena najmanjša vrednost Dec. Če uporabimo največjo vrednost, se vsi izračuni v enaki meri razlikujejo od izračunov, kjer je uporabljena najmanjša vrednost. Se pravi, ko primerjamo rezultat posameznega izračuna, ko je uporabljena najmanjša vrednost Dec z izračunom, ko je uporabljena največja vrednost Dec, dobimo neko razliko. Razlike vseh izračunov posamezne simulacije so enake. Te razlike so podane v tabeli Tabela 10 na strani 26.

Shranil sem slike Lune, ko kulminira 21. 2. 2013 ob 21:0:33 in 22.2.2010 ob 21:48:12 ter sliko, ko je na višini pribl. 19° 22. 2. ob 2:30:0, tj. v prvi noči po kulminaciji, preden zaide.

Tabela 5: Rezultati 1. simulacije

α_1	α_2	α_3	d [km]	odstopanje [km]
povp.	povp.	povp.	417.506	-141
m	m	m	417.782	135
m	M	m	419.456	1.809
m	m	M	417.289	-357
m	M	M	417.959	1.313
M	m	m	416.059	-420
M	M	m	417.719	73
M	m	M	415.570	-2.076
M	M	M	417.227	-420
rezultat			417.509(1 $\pm$ 0,47%)	+5%

Pri drugi simulaciji sem obravnaval položaje 2. 3. ob kulminaciji (3:27:44), 3. 3. ob 2:0:0 in 3.3. ob kulminaciji (4:22:36).

Tabela 6: Rezultati 2. simulacije

α_1	α_2	α_3	d [km]	odstopanje [km]
povp.	povp.	povp.	450.104	-212
m	m	m	449.030	-1.286
m	M	m	446.629	-3.687
m	m	M	453.174	2.858
m	M	M	450.728	412
M	m	m	449.473	858
M	M	m	447.067	-3.249
M	m	M	453.625	3.309
M	M	M	451.174	858
rezultat			450.116(1 $\pm$ 0,78%)	+22%

Pri tretjem primeru gre za kulminaciji 21. 3. 2013 ob 19:39:47 in 22. 3. ob 20:26:41 ter za položaj, ko določamo oddaljenost, 21. 3. 2013 ob 23:39:47.

Tabela 7: Rezultati 3. simulacije

α_1	α_2	α_3	d [km]	odstopanje [km]
povp.	povp.	povp.	366.032	-99
m	m	m	366.444	313
m	M	m	367.435	1.304
m	m	M	366.283	152
m	M	M	367.274	1.143
M	m	m	364.794	-514
M	M	m	365.777	-354
M	m	M	364.635	-1.496
M	M	M	365.617	-514
rezultat			366.034(1 $\pm$ 0,38%)	-8%

V četrtem primeru Luna kulminira 20. 4. 2013 ob 20:51:31 in 21. 4. 2013 ob 21:37:50. Na prib. 2° višine je 21. 4. 2013 ob 3:16:0.

Tabela 8: Rezultati 4. simulacije

α_1	α_2	α_3	d [km]	odstopanje [km]
povp.	povp.	povp.	382.408	-70
m	m	m	382.469	-9
m	M	m	383.433	955
m	m	M	382.097	-381
m	M	M	383.059	581
M	m	m	381.757	-133
M	M	m	382.718	240
M	m	M	381.386	-1.092
M	M	M	382.345	-133
rezultat			382.409 (1 $\pm$ 0,27%)	-2%

V peti simulaciji računamo oddaljenost na 21. 7. 2013 ob 2:0:0. Luna kulminira 20. 7. 2013 ob 23:10:42 in 22. 7. 2013 ob 0:12:53.

Tabela 9: Rezultati 5. simulacije

α_1	α_2	α_3	d [km]	odstopanje [km]
povp.	povp.	povp.	355.813	-46
m	m	m	355.878	19
m	M	m	356.468	609
m	m	M	355.677	-182
m	M	M	356.266	407
M	m	m	355.357	-115
M	M	m	355.945	86
M	m	M	355.157	-702
M	M	M	355.744	-115
rezultat			355.813(1 $\pm$ 0,20%)	-0,5%

Tabela 10: Razlike pri uporabi min. ali max. Dec

simulacija	razlike med izračuni [km]
1	3
2	8
3	4
4	2
5	4

Pri vseh izračunih se izkaže, da enačbi Enačba 11 in 12 dasta enak rezultat.

4 Razprava

Cilj naloge je zagotovo dosežen. Toda delo s tem ni končano. Metodo je potrebno poglobljeno preučiti v teoriji in natančno izvesti v praksi. V sklopu prvega merim predvsem na potencialne dele, ki prispevajo k napakam in k netočnosti. Z njihovo preučitvijo in odpravo bi lahko še izboljšali točnost.

4.1 Poenostavitve in netočnosti

V nalogi so poenostavitve, brez katerih ne bi bil mogoč razvoj metode. To so (verjetno) razlogi za netočnost rezultata.

4.1.1 Fotografiranje

Ko kombiniramo fotografiji v eno, naredimo veliko poenostavitev, ki prinese ogromno napako. Fotoaparat lahko namestimo na montažo, ki sledi vrtenju neba in privzamemo, da sta fotografiji zamaknjeni ena na drugo zaradi premika fotoaparata med zajemanjem. Zaradi tega moramo napravo zelo stabilno montirati ali uporabiti dovolj občutljivo napravo, da se na fotografiji s krajšo ekspozicijo pojavita vsaj dve zvezdi, da lahko fotografiji poravnamo.

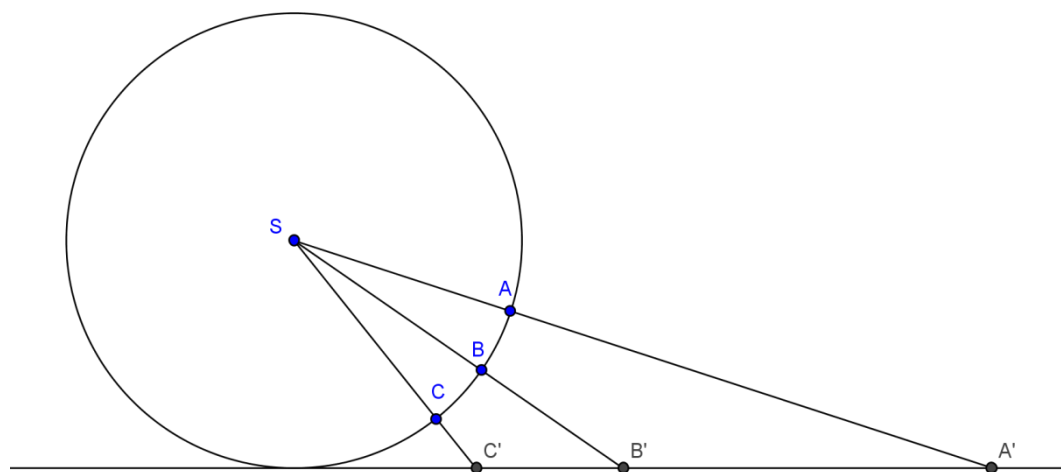
Dela se moramo lotiti, ko je Luna v fazi med prvim in zadnjim krajcem, ker v tem času kulminira, ko je Sonce že zašlo. Da bi lahko ujeli zvezdi na krajši ekspoziciji, je bolje, da delamo pri manjši osvetljenosti Luninega površja, npr. pri prib. 60 %.

4.1.2 Hitrost

Lunino gibanje na nebu ni tako enostavno, kot če bi se ji koordinati enakomerno spreminjali ves čas. Izračunana hitrost je v bistvu povprečna hitrost v časovnem intervalu med prvo in tretjo meritvijo. Povprečna hitrost, merjena v času med prvo in drugo meritvijo, se (verjetno) razlikuje od izračunane. Razlika je (verjetno) majhna, ampak je prisotna.

4.1.3 Merilo

Moramo se zavedati, da razdalje med nebesnimi telesi na fotografiji niso v enakem razmerju kot na nebu. Na sliki 18 sta kota ASB in BSC enako velika, ampak razdalji B'C' in A'B' nista. Enako je na fotografijah. Torej merilo ni univerzalno za celotno fotografijo. Če za izračun uporabimo položaj zvezde, ki je enako oddaljena od središča fotografije kot je središče Lune, je netočnost manjša ali je celo ni.



Slika 18: Neohranjenje razdalj

4.1.4 Napake meritev

Najpomembnejša poenostavitev je določevanje napak pri ekvatorialnih koordinatah in pri oddaljenosti. Težava je v tem, da izhaja iz napake središča na fotografiji. Poenostavljeno smo napako linearno prenesli na sfero. Zaradi netočnosti se pojavijo določene izjeme, npr. razlika v treh kilometrih med povprečjem rezultatov z uporabo ekstremnih vrednosti koordinat in rezultatom z uporabo povprečnih vrednosti. Takšna razlika je prisotna pri ekvatorialnih koordinatah, toda v rangi 10^{-11} s za rektascenzijo in $10^{-5}''$ za deklinacijo. Prišel sem do vprašanja, katero vrednost obravnavati kot končen rezultat, povprečje rezultatov ali rezultat s

povprečnima koordinatama. Kot kompromis sem vzel povprečje vseh rezultatov, saj so vsi enakovredni. Napaka meritve je potem absolutna vrednost največjega odstopanja od povprečja vseh rezultatov.

4.2 Natančnost in točnost

Natančnost rezultatov je izjemna. Majhna napaka oddaljenosti izhaja iz majhne napake uporabljenih koordinat, te pa izhajajo iz majhne napake položaja središča Lune na fotografiji. Središče je v simulacijah natančno določeno, ker je rob Lune na nadomestkih fotografij dokaj oster. Ampak ta ne bo nujno na pravih fotografijah in zato bodo podatki iz realnih meritev manj natančni.

Število zanesljivih mest meritev je vprašljiva. V GeoGebri lahko nastavimo zaokroževanje tudi na 15 decimalnih mest, kar je nesmisel. Smiselno je, da upoštevamo toliko mest, da se večkrat odčitane koordinate med sabo razlikujejo. Npr. če imamo podatke 125,20; 125,10; 125,12; 125,03 in 125,15 je smiselno upoštevati stotice, saj bi drugače bili podatki med sabo malo raznoliki.

O smislu decimalk je podobno pri ekvatorialnih koordinatah. Ločna sekunda je dokaj majhna enota, zato je vprašljivo, če se je smiselno ukvarjati z decimalkami, ker ni nujno, da so enice ali celo desetice pri sekundah točne (pri zapisu npr. $14^{\circ} 23' 54''$). Ampak drugače je z enotami za rektascenzijo, čas in časovni kot. Pri teh so enote 15-krat večje in v primerjavi s količinami izraženimi v kotnih enotah, moramo upoštevati eno mesto več, ker so enote v 10-kratnem rangi večje. Napačno je (po mojem mnenju), če rečemo, da ima vrednost meritve deklinacije $5,36^{\circ}$ manjše število zanesljivih mest kot vrednost meritve $76,93^{\circ}$, ker mi govorimo o koordinatah. Smiselno je pri tem dojemati kot kriterij natančnosti meritve število decimalnih mest vrednosti meritve, ker s tem primerjamo, kateri podatki so podrobneje poznani.

Še bolj vprašljiva pa so zanesljiva mesta pri končnem rezultatu. Če se sklicujemo na to, da imajo končni rezultati toliko zanesljivih mest, kolikor jih ima najmanj natančen vhodni podatek, potem bi oddaljenost obravnavali kot natančno na desetine. Vendar je pri tem prisotno vprašanje točnosti. Napako določamo, da bi zagotovili točnost meritev. Toda v simulacijah se izkaže, da to ni res. Glede na to, da vrednosti odstopajo za več odstotkov od pravilne vrednosti, nima smisla upoštevati decimalke in tudi ne npr. enic, desetic in stotic.

4.3 Nadaljnje delo

Da sem lahko razvil računski postopek, sem uporabil pojme in ideje, ki jih nisem zasledil v literaturi in sem jih sam določil. To so npr. obravnavanje paralakse kot lok na nebesni krogli, paralaksa v rektascenziji in deklinaciji ter kot x . Morda so ti pojmi v strokovnih krogih sprejeti in uporabljeni, ampak se z njimi nisem srečal in sem jih moral sam definirati. Zaradi takšne vsebine potrebuje naloga temeljit strokovni pregled. Potrebna je tudi strokovna presoja, ali so uporabljeni pravi statistični načini za obravnavanje meritev in napak.

Ko sem z nalogo prišel dovolj daleč, da sem vedel, katere podatke potrebujem, sem šele točno vedel, kako je potrebno posneti fotografije. To je bilo sredi zime in od takrat do zaključka naloge ni bilo priložnosti za fotografiranje zaradi oblačnega vremena. S praktično izvedbo bi se pokazala uporabnost metode, saj bi ugotovili dejansko točnost in natančnost metode. V poštrev bi prišle še druge napake, ki se pojavijo med fotografiranjem in ukvarjanjem s pravimi fotografijami.

Če se dovolj zanašamo na točnost rezultatov, potem lahko npr. z njihovo uporabo spremljamo Lunino gibanje v prostoru in ugotavljamo lastnosti oblike tira, npr. ekscentričnost.

Literatura

- [1] PROSEN, Marijan. 1990. Paralaksa. *Presek* [online]. letnik 18 (1990/1991), številka 1 [citirano 21. 2. 2013; 22:19], str. 50–55. Dostopno na spletnem naslovu: <<http://www.presek.si/18/1023-Prosen.pdf>>. ISSN 0351-6652.
- [2] *Opis nekaterih osnovnih astronomskih pojmov in vrtljive zvezdne karte* [spletna stran]. [Datum zadnjega popraviljanja 15. 9. 2012; 17:19:31], [citirano 25. 2. 2013, 23:01]. Dostopno na spletnem naslovu: <<http://www2.arnes.si/~gljsentvid10/zveka98.html>>.
- [3] STERN, David P. 2004. *How distant is the Moon?*—2 [spletna stran] [Datum zadnjega popraviljanja 15. 10. 2004], [citirano 21. 2. 2013; 21:43]. Dostopno na spletnem naslovu: <<http://www-istp.gsfc.nasa.gov/stargaze/Shipparc.htm>>.
- [4] EVANS, James. 1998. *The History and Practice of Ancient Astronomy*: New York : Oxford University Press. ISBN 978-0-19-509539-5. [citirano 21. 2. 2013; 22:05]. Dostopno na naslovu: <http://books.google.si/books?id=LVp_gkwyvC8C&pg=PA252&lpg=PA252&dq=history+of+lunar+parallax&source=bl&ots=NPqPMHrHDX&sig=Op7bp8prfG4sZ1fYSzJ2bgxlsSk&hl=sl&sa=X&ei=EWD8UOLgFYfE4gTwh4HwCA&ved=0CCkQ6AEwAjgK#v=onepage&q&f=false>.
- [5] ŠERVOLIĆ, Branislav M. 1986. *Kratka zgodovina astronomije 2. del : Od Newtona do današnjih dni*: Ljubljana : Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS.
- [6] *Sinusni izrek* [spletna stran]. [Datum zadnjega popraviljanja 10. 2. 2008; 23:43:10], [citirano 21. 2. 2013, 22:32]. Dostopno na spletnem naslovu: <<http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2006/ura/friedl/html/sinusniizrek.htm>>.
- [7] STÖCKER, Horst. 2006. *Matematični priročnik z osnovami računalništva*: 1. natis. Ljubljana : Tehniška založba Slovenije. ISBN 86-365-0587-9.
- [8] ZWITTER, Tomaž. *Naše in druga osončja* [spletno gradivo]. [Datum zadnjega popraviljanja 8. 10. 2009; 14:46:30], [citirano 21. 2. 2013; 22:46]. Dostopno na spletnem naslovu: <http://predmeti.fmf.uni-lj.si/osoncja?action=AttachFile&do=get&target=skripta_maj2009.pdf>.
- [9] ZAJC, Simon. *Astronomski koledar* [spletna stran]. [citirano 21. 2. 2013; 22:53]. Dostopno na spletnem naslovu: <<http://vesolje.net/koledar/koledar.php?mesec=10&leto=2012&kraj=Celje&pogled=mesec>>.
- [10] BACKHAUS, Udo. 1999. *Die Bewegungen des Mondes: Die parallaktische Bewegung* [spletna stran]. [Datum zadnjega popraviljanja 29. 10. 2012; 14:18:16], [citirano 21. 2. 2013; 23:05]. Dostopno na spletnem naslovu: <<http://www.didaktik.physik.uni-duisburg-essen.de/~backhaus/temp/BewegungendesMondes/#SECTION00050000000000000000>>.
- [11] *Stellarium* [spletna stran]. [Datum zadnjega popraviljanja 21. 2. 2013; 23:07:05], [citirano 21. 2. 2013; 23:12]. Dostopno na spletnem naslovu: <<http://www.stellarium.org/>>.
- [12] KOCIJANČIČ, Saša. 1999. *Uvod: merske napake* [spletna stran]. [Datum zadnjega popraviljanja 30. 9. 1999; 10:18:54], [citirano 21. 2. 2013; 23:27]. Dostopno na spletnem

naslovu: <http://www2.arnes.si/~sspsfran/enote/nivo1_Unapake.html>.

[13] *Geogebra* [spletna stran]. [citirano 21. 2. 2013]. Dostopno na spletnem naslovu: <<http://www.geogebra.org/cms/>>

[14] *Cartes du Ciel* [spletna stran]. [Datum zadnjega popraviljanja 16. 11. 2013; 16:31], [citirano 21. 2. 2013; 23:35]. Dostopno na spletnem naslovu: <<http://www.ap-i.net/skychart/start>>

[15] ŠVETAK, Jelenko. 2005. *Osnove navigacije* [diaprojekcija]. [Datum zadnjega popraviljanja 1. 10. 2005; 8:34:58], [citirano 21. 2. 2013; 23:44]. str. 84,85. Dostopno na spletnem naslovu: <http://www.google.si/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&ved=0CDMQFjAB&url=http%3A%2F%2Fwww.fpp.uni-lj.si%2Fmma_bin.php%3Fid%3D2011102112065064&ei=IdEXUYPRJouQ4gT7vYGIBA&usg=AFQjCNEgp-xK2I6wZelBKhtUK5nomeKsuA&sig2=hxmWgqOlXk6irfjTnxtDxA>.

[16] *Coordinate Projections Used for IRAS Maps: Gnomonic (Tangent Plane) Projection* [spletna stran]. [citirano 21. 2. 2013; 23:49]. Dostopno na spletnem naslovu: <<http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/iras/coordproj.cfm>>.

Viri slik

- Slika 1: <<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/38/Sftriangle.png>> citirano 7. 3. 2013; 23:18
- Slika 2: Pridobil iz programa Stellarium.
- Slika 3: <http://www2.arnes.si/~gljsentvid10/ko_zeve.jpg> citirano 7. 3. 2013; 23:20
- Slika 4: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/sl/thumb/7/74/Sistem_horizonta.svg/300px-Sistem_horizonta.svg.png> citirano 7. 3. 2013; 23:21
- Slika 5: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/f7/Casovni_kot.svg/614px-Casovni_kot.svg.png> citirano 7. 3. 2013; 23:22
- Slika 6: PROSEN, Marijan. 1990. Paralaksa. *Presek* [online]. letnik 18 (1990/1991), številka 1 [citirano 21. 2. 2013; 22:19], str. 50-55. Dostopno na spletnem naslovu: <<http://www.presek.si/18/1023-Prosen.pdf>>. ISSN 0351-6652.
- Slika 7: Ustvarjeno s programom GeoGebra.
- Slika 8: Ustvarjeno s programom GeoGebra.
- Slika 9: Ustvarjeno s programom GeoGebra.
- Slika 10: avtorska fotografija
- Slika 11: Kopija zaslona.
- Slika 12: Kopija zaslona.
- Slika 13: Kopija zaslona.
- Slika 14: Ustvarjeno s programom GeoGebra.
- Slika 15: Ustvarjeno s programom GeoGebra.
- Slika 16: Pridobil iz Cartes du Ciel-a.
- Slika 17: <<http://demonstrations.wolfram.com/InverseGnomonicProjectionsOfPlaneRegions/>> citirano 7. 3. 2013; 23:28
- Slika 18: Ustvarjeno s programom GeoGebra.